

Wolfgang Demtröder

SPEKTROSKOPIA LASEROWA



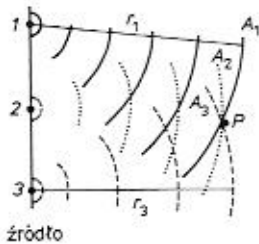
Warszawa 1993
Wydawnictwo Naukowe PWN

2.10. SPÓJNOŚĆ

Pole promieniowania emitowanego przez źródło rozciągnięte jest superpozycją nieskończonej liczby fal elementarnych emitowanych przez poszczególne elementy powierzchni źródła dS . Jeśli amplitudy i fazy tych fal elementarnych oznaczymy przez A_n i φ_n , to amplituda A pola wypadkowego w punkcie P jest równa (rys. 2.34):

$$A(P) = \sum_n A_n(P) e^{i\varphi_n(P)} = \sum_n [A_n(0)/r_n^2] e^{i[\varphi_{n0} + 2\pi r_n/\lambda]}, \quad (2.170)$$

gdzie $\varphi_{n0}(t) = \omega t + \varphi_n(0)$ jest fazą n -tej fali elementarnej na powierzchni źródła. Fazy



Rys. 2.34. Pole promieniowania w punkcie P jako superpozycja nieskończonej liczby fal o amplitudach A_n wysyłanych przez różne punkty źródła rozciągniętego

$\varphi_n(r_n, t)$ zależą od odległości od źródła r_n i od częstości ω . Jeśli różnice faz fal elementarnych w określonym punkcie P i dwóch różnych chwilach t_1 i t_2 , $\Delta\varphi_n = \varphi_n(P, t_1) - \varphi_n(P, t_2)$, są niemal takie same dla wszystkich fal elementarnych, to pole promieniowania w punkcie P nazywa się *czasowo spójnym*. Maksymalny przedział czasowy $\Delta t = t_2 - t_1$, dla którego te różnice faz $\Delta\varphi_n$ różnią się od siebie, dla wszystkich fal elementarnych, o mniej niż π nazywa się *czasem spójności* źródła promieniowania. Droga przebyta przez falę w czasie równym czasowi spójności Δt , $\Delta s_c = c\Delta t$, nazywa się *długością spójności*.

Jeśli różnica faz całkowitych amplitud $A = A_0 e^{i\varphi}$ w dwóch różnych punktach P_1 i P_2 , $\Delta\varphi = \varphi(P_1) - \varphi(P_2)$, jest stała w czasie, to pole promieniowania nazywa się *przestrzennie spójnym*. Wszystkie punkty P_m i P_n , dla których warunek $|\varphi(P_m, t) - \varphi(P_n, t)| < \pi$ jest spełniony dla wszystkich chwil t , są niemal jednakowo odległe od źródła i tworzą *powierzchnię spójności*. Iloczyn powierzchni spójności i długości spójności nazywa się *objętością spójności*.

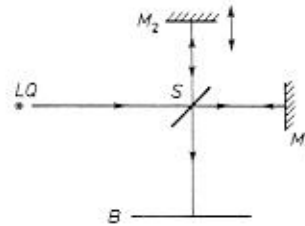
W wyniku nakładania się fal spójnych otrzymuje się zjawiska interferencyjne, które mogą być jednak bezpośrednio obserwowane jedynie w obszarze ograniczonym przez objętość spójności. Rozmiary tego obszaru zależą od wielkości źródła

promieniowania, szerokości widmowej promieniowania i odległości punktu obserwacji P od źródła.

Różne rodzaje spójności pól promieniowania zostaną omówione poniżej na przykładach.

2.10.1. Spójność czasowa

Rozważmy źródło punktowe umieszczone w płaszczyźnie ogniskowej soczewki. Wytwarzana przez soczewkę równoległa wiązka światła jest dzielona, za pomocą płytki światłodzielącej S , na dwie wiązki (patrz rys. 2.35), które są następnie



Rys. 2.35. Interferometr Michelsona do pomiaru spójności czasowej promieniowania

nakładane na siebie w płaszczyźnie obserwacji B po odbiciu od zwierciadeł M_1 i M_2 . Taki układ optyczny nazywa się *interferometrem Michelsona* (patrz paragraf 4.2). Dwie wiązki o długości fali λ przebywają różne drogi optyczne SM_1SB i SM_2SB , których różnica w płaszczyźnie B wynosi $\Delta s = 2(SM_1 - SM_2)$. Zwierciadło M_2 jest umieszczone na wózku i może być przesuwane, w wyniku czego otrzymuje się ciągłą zmianę Δs . Maksymalne natężenie otrzymujemy w płaszczyźnie B wówczas, gdy obie amplitudy mają tę samą fazę, a więc gdy $\Delta s = m\lambda$, a minimalne natężenie, gdy $\Delta s = (2m + 1)\lambda/2$. Przy wzroście Δs kontrast $(I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min})$ maleje i staje się równy zeru, gdy Δs jest większe od długości spójności Δs_c . Doświadczenie pokazuje, że Δs_c jest związane z szerokością widmową fali padającej zależnością

$$\Delta s_c \approx c/\Delta\omega = c/(2\pi\Delta\nu). \quad (2.171)$$

Ten wynik może być wyjaśniony w następujący sposób. Fala o szerokości widmowej $\Delta\omega$ emitowana przez źródło punktowe może być traktowana jako superpozycja wielu składowych kwazimonochromatycznych o częstościach ω_n z przedziału $\Delta\omega$. W wyniku tej superpozycji otrzymuje się ciągi falowe o skończonej długości $\Delta s_c = c\Delta t \approx c/\Delta\omega$, gdyż różne składowe o nieco różnych częstościach ω_n po upływie czasu Δt tracą zgodność fazową i interferują destruktywnie, co prowadzi do zmniejszenia się całkowitej amplitudy (patrz także paragraf 3.1). Jeśli różnica dróg optycznych w interferometrze Michelsona Δs jest większa niż Δs_c , to ciągi falowe obu wiązek nie zachodzą na siebie w płaszczyźnie B . Długość spójności źródła światła Δs_c rośnie więc ze zmniejszaniem się szerokości widmowej $\Delta\omega$.

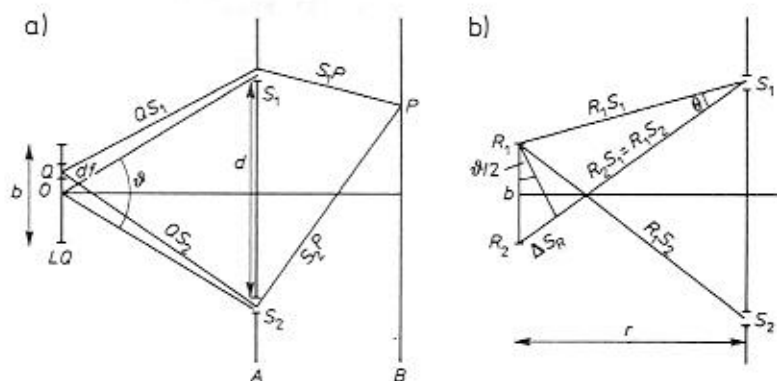
Przykłady

1. Promieniowanie niskociśnieniowej rtęciowej lampy spektralnej z filtrem przepuszczającym jedynie linię zieloną o długości fali $\lambda = 546 \text{ nm}$ ma długość spójności $\Delta s_c \approx 8 \text{ cm}$ wyznaczoną przez dopplerowską szerokość linii $\Delta\omega_D = 4 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$.

2. Światło jednomodowego lasera helowo-neonowego o szerokości widmowej $\Delta\nu = 1$ MHz ma długość spójności około 50 m.

2.10.2. Spójność przestrzenna

Promieniowanie ze źródła rozciągniętego o rozmiarze liniowym b oświetla dwie szczeliny S_1 i S_2 znajdujące się w płaszczyźnie A w odległości d od siebie (doświadczenie interferencyjne Younga, rys. 2.36a). Całkowitą amplitudę i fazę pola



Rys. 2.36. Doświadczenie Younga z dwiema szczelinami – pomiar spójności przestrzennej

w każdej ze szczelin otrzymuje się przez nałożenie fal elementarnych emitowanych przez poszczególne elementy powierzchni źródła df z uwzględnieniem różnicy odległości df od S_1 i S_2 .

Natężenie promieniowania w punkcie obserwacji P leżącym w płaszczyźnie B zależy od różnicy dróg optycznych $S_1P - S_2P$ i różnicy faz $\Delta\varphi = \varphi(S_1) - \varphi(S_2)$ całkowitych amplitud pola w punktach S_1 i S_2 . Jeśli różne elementy powierzchni źródła df promieniają niezależnie od siebie z przypadkowymi fazami (źródło promieniowania termicznego), to fazy całkowitych amplitud pola w punktach S_1 i S_2 także zmieniają się w sposób przypadkowy. Jednakże nie ma to wpływu na natężenie w punkcie P dopóty, dopóki fluktuacje fazy w punktach S_1 i S_2 są synchroniczne, gdyż wówczas różnica faz $\Delta\varphi$ pozostaje stała. W tym przypadku szczeliny są dwoma źródłami spójnymi wytwarzającymi obraz interferencyjny w płaszczyźnie B .

Powyższe warunki są spełnione dla promieniowania wysyłanego ze środkowej części źródła światła O , gdyż drogi optyczne OS_1 i OS_2 są równe i wszelkie fluktuacje fazy w punkcie O docierają jednocześnie do S_1 i S_2 . Dla wszystkich innych punktów źródła Q istnieje niezerowa różnica dróg optycznych $\Delta s_Q = QS_1 - QS_2$, która jest największa dla skrajnych punktów źródła R_1 i R_2 . Dla $b \ll r$ otrzymujemy (patrz rysunek 2.36b) $\Delta s_R = R_1S_2 - R_1S_1 = R_2S_1 - R_1S_1 \approx b \sin(\vartheta/2)$. Dla $\Delta s_R > \lambda/2$ różnica faz $\Delta\varphi$ fal elementarnych w punktach S_1 i S_2 jest większa od π . Jeśli emisja fal przez poszczególne elementy powierzchni źródła df ma charakter przypadkowy, to w wyniku uśrednienia w czasie obraz interferencyjny w płaszczyźnie B zostaje rozmyty. Warunkiem spójnego oświetlenia punktów S_1 i S_2 przez źródło światła

o rozmiarze b jest więc

$$\Delta s = b \sin(\vartheta/2) < \lambda/2. \quad (2.172a)$$

Ponieważ $2 \sin(\vartheta/2) = d/r$, więc ten warunek można zapisać w postaci

$$bd/r < \lambda. \quad (2.172b)$$

Uogólnienie tego warunku na przypadek dwuwymiarowy daje następujący warunek dla maksymalnej powierzchni $A_c = d^2$, która może być oświetlona spójnie przez źródło o powierzchni $A_s = b^2$:

$$b^2 d^2 / r^2 \leq \lambda^2. \quad (2.172c)$$

Ponieważ $d\Omega = d^2/r^2$ jest kątem bryłowym, pod którym widać ze źródła oświetlaną powierzchnię $A_c = d^2$, więc równanie (2.172c) można zapisać w postaci

$$A_s d\Omega \leq \lambda^2. \quad (2.173)$$

Powierzchnia źródła $A_s = b^2$ wyznacza maksymalny kąt bryłowy $d\Omega \leq \lambda^2/A_s$, wewnątrz którego pole promieniowania wykazuje spójność przestrzenną. Równanie (2.173) pokazuje, że promieniowanie źródła punktowego (fala kulista) jest spójne przestrzennie w pełnym kącie bryłowym $d\Omega = 4\pi$. Powierzchnie spójności są powierzchniami kulistymi o środku w źródle. Podobnie, fala płaska wytworzona przez źródło punktowe umieszczone w ognisku soczewki wykazuje spójność przestrzenną w całym obszarze wiązki świetlnej. Dla ustalonych rozmiarów źródła powierzchnia spójności $A_c = d^2$ rośnie ze wzrostem odległości od źródła jak kwadrat tej odległości. Ze względu na olbrzymie oddalenie gwiazd od Ziemi, światło gwiazd, obserwowane przez teleskop, jest spójne przestrzennie w obszarze apertury teleskopu mimo znacznych rozmiarów źródła promieniowania.

Powyższe rozważania można podsumować następująco. Powierzchnia spójności S , tzn. ta powierzchnia A_c , która może być spójnie oświetlona w odległości r od rozciągniętego kwazimonochromatycznego źródła światła o powierzchni A_s , emitującego promieniowanie o długości fali λ , jest wyznaczona przez związek

$$S = \lambda^2 r^2 / A_s. \quad (2.173a)$$

2.10.3. Objętość spójności

Ponieważ długość spójności w kierunku rozchodzenia się promieniowania o szerokości widmowej $\Delta\omega$ jest $\Delta s_c = c/\Delta\omega$, a powierzchnia spójności $S_c = \lambda^2 r^2 / A_s$, więc objętość spójności $V_c = S_c \Delta s_c$ jest równa

$$V_c = \lambda^2 r^2 c / (\Delta\omega A_s). \quad (2.174)$$

Jednostkowy element powierzchni źródła o luminancji widmowej L_ω [W/(m²·sr)] emituje w przedziale częstości $d\omega = 1 \text{ s}^{-1}$, w jednostkowym kącie bryłowym 1 sr, $L_\omega/\hbar\omega$ fotonów w czasie jednej sekundy.

Średnia liczba fotonów \bar{n} w przedziale widmowym $\Delta\omega$ w objętości spójności wyznaczonej przez kąt bryłowy $\Delta\Omega \leq \lambda^2/A_s$ i długość spójności $\Delta s_c = c\Delta t_c$, wysłanych ze źródła o powierzchni A_s jest, wobec tego, równa

$$\bar{n} = (L_\omega/\hbar\omega)A_s\Delta\Omega\Delta\omega\Delta t_c. \quad (2.175)$$

Ponieważ $\Delta\Omega = \lambda^2/A_s$, a $\Delta t_c \approx 1/\Delta\omega$, zatem

$$\boxed{\bar{n} = (L_\omega/\hbar\omega)\lambda^2}. \quad (2.176)$$

Przykład

W przypadku źródła promieniowania termicznego luminancja widmowa dla światła spolaryzowanego liniowo (wyrażenie (2.28) podzielone przez 2) jest równa, dla $\cos\vartheta = 1$ i $L_\nu d\nu = L_\omega d\omega$,

$$L_\nu = (hv^3/c^2)/[\exp(hv/kT) - 1].$$

Średnia liczba fotonów w objętości spójności jest więc równa ($\lambda = c/v$): $\bar{n} = 1/[\exp(hv/kT) - 1]$. Ta wartość jest taka sama jak średnia liczba fotonów w modzie promieniowania termicznego, wyznaczona w paragrafie 2.2. Średnia liczba fotonów w modzie \bar{n} jest często nazywana *parametrem degeneracji* pola promieniowania.

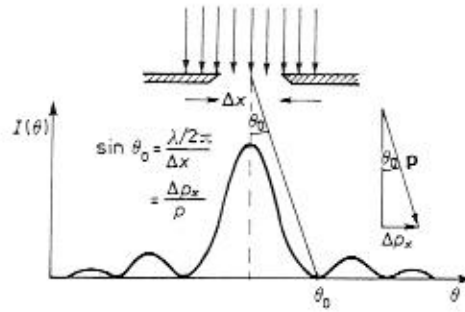
Objętość spójności jest bezpośrednio związana z liczbą modów pola promieniowania. Można to wyjaśnić następująco. Każdy mod pola promieniowania we wnęce jest reprezentowany przez falę płaską o wektorze falowym \mathbf{k} wskazującym kierunek rozchodzenia się fali, częstości $\omega = c|\mathbf{k}|$ i natężeniu wyznaczonym przez liczbę fotonów n w tym modzie (patrz paragraf 2.1). Jeśli pozwolimy promieniowaniu ze wszystkich modów o tym samym kierunku \mathbf{k} wydostać się na zewnątrz przez otwór w ścianie wnęki o powierzchni $A_s = b^2$, to fala emitowana przez A_s nie będzie ściśle równoległa, lecz będzie miała wynikającą z ograniczenia dyfrakcyjnego rozbieżność kątową $\theta \approx \lambda/b$ wokół kierunku \mathbf{k} . To oznacza, że promieniowanie jest emitowane w kącie bryłowym $d\Omega = \lambda^2/b^2$. Jest to ten sam kąt bryłowy (2.173) ograniczający obszar, w obrębie którego promieniowanie jest spójne przestrzennie.

Mody o tym samym kierunku \mathbf{k} (o którym zakładamy, że jest zgodny z kierunkiem osi z) mogą różnić się między sobą wartością $|\mathbf{k}|$, tzn. mogą mieć różne częstości ω . Długość spójności jest wyznaczona przez szerokość widmową $\Delta\omega$ promieniowania emitowanego przez A_s . Ponieważ $|\mathbf{k}| = \omega/c$, więc szerokość widmowa $\Delta\omega$ odpowiada przedziałowi wartości k równemu $\Delta k = \Delta\omega/c$.

Jak wiadomo z fizyki atomowej, dyfrakcję światła można wyjaśnić na gruncie zasady nieoznaczoności Heisenberga. Nieoznaczoność Δp_x składowej w kierunku x , p_x , pędu \mathbf{p} fotonów przechodzących przez szczelinę o szerokości Δx jest wyznaczona przez związek $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$ (patrz rys. 2.37).

Zasada nieoznaczoności uogólniona do trzech wymiarów wymaga, aby w przypadku jednoczesnego pomiaru pędu i położenia fotonu nieoznaczoności tych

Rys. 2.37. Zasada nieoznaczoności w zastosowaniu do dyfrakcji światła na szczelinie



wielkości spełniały warunek

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \Delta x \Delta y \Delta z \geq h^3 = V_{ph}, \quad (2.177)$$

gdzie $V_{ph} = h^3$ jest objętością jednej komórki przestrzeni fazowej. Fotony z tej samej komórki przestrzeni fazowej są nierozróżnialne i w konsekwencji można je uważać za identyczne.

Minimalna nieoznaczoność składowych pędu p_x i p_y fotonów emitowanych przez otwór $A_s = b^2$ w obszarze kąta dyfrakcyjnego $\theta = \lambda/b$ wokół normalnej do powierzchni, skierowanej w kierunku osi z , jest równa

$$\Delta p_x = \Delta p_y = |\mathbf{p}| \lambda / (2\pi b) = (\hbar\omega/c) \lambda / (2\pi b) = (\hbar\omega/c) d / (2\pi r) \quad (2.178)$$

(ostatnia równość wynika z (2.172b)).

Nieoznaczoność Δp_z jest spowodowana głównie szerokością widmową $\Delta\omega$. Ponieważ $p = \hbar\omega/c$, więc

$$\Delta p_z = (\hbar/c) \Delta\omega. \quad (2.179)$$

Wstawiając wzory (2.178) i (2.179) do (2.177), otrzymujemy następujące wyrażenie na składową przestrzenną komórki przestrzeni fazowej:

$$\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\lambda^2 r^2 c}{\Delta\omega A_c} = V_c, \quad (2.180)$$

które jest takie samo jak wyrażenie (2.174) wyznaczające objętość spójności.

2.10.4. Funkcja spójności wzajemnej i stopień spójności

W poprzednich paragrafach omówiliśmy spójność pól promieniowania w sposób jakościowy. Obecnie przedyskutujemy zwięzłe opis ilościowy, który pozwoli nam na rozważenie spójności częściowej oraz na otrzymanie ilościowej miary stopnia spójności.

W przypadku spójności czasowej interesuje nas korelacja między polami optycznymi w tym samym punkcie P , ale w różnych chwilach ($E(P, t_1)$ i $E(P, t_2)$), w przypadku spójności przestrzennej – korelacja między polami w tej samej chwili, ale w dwóch różnych punktach ($E(P_1, t)$ i $E(P_2, t)$). Poniższa dyskusja jest wzorowana na pracach [2.3], [2.26].

Załóżmy, że mamy źródło rozciągle wytwarzające pole promieniowania o wąskim pasmie widmowym $\Delta\omega$, które przedstawimy w zapisie zespolonym jako falę płaską

$$E(\mathbf{r}, t) = A_0 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}. \quad (2.181)$$

W dwóch punktach przestrzeni S_1 i S_2 (np. w punktach, gdzie znajdują się szczeliny w doświadczeniu Younga) to pole jest równe $E(S_1, t)$ i $E(S_2, t)$. Te szczeliny są wtórnymi źródłami promieniowania (patrz rys. 2.36) i pole wypadkowe w punkcie obserwacji P jest równe

$$E(P, t) = k_1 E_1(S_1, t - r_1/c) + k_2 E_2(S_2, t - r_2/c), \quad (2.182)$$

gdzie liczby urojone k_1 i k_2 są zależne od wielkości szczelin i odległości $r_1 = S_1 P$ i $r_2 = S_2 P$.

Wypadkowe natężenie promieniowania w punkcie P , mierzone w przedziale czasowym dużym w porównaniu z czasem spójności, jest równe

$$I_P = \varepsilon_0 c \langle E(P, t) E^*(P, t) \rangle, \quad (2.183)$$

gdzie nawiasy $\langle \dots \rangle$ oznaczają średnią po czasie. Korzystając z (2.182), otrzymujemy

$$I_P = c\varepsilon_0 [k_1 k_1^* \langle E_1(t-t_1) E_1^*(t-t_1) \rangle + k_2 k_2^* \langle E_2(t-t_2) E_2^*(t-t_2) \rangle + k_1 k_2^* \langle E_1(t-t_1) E_2^*(t-t_2) \rangle + k_1^* k_2 \langle E_1^*(t-t_1) E_2(t-t_2) \rangle]. \quad (2.184)$$

Jeśli pole jest stacjonarne, to wartości uśrednione po czasie są niezależne od czasu. Możemy wobec tego dokonać przesunięcia w czasie, co nie spowoduje zmiany wartości natężeń (2.183). Zgodnie z powyższym dwie pierwsze średnie w równaniu (2.184) możemy przekształcić do postaci $\langle E_1(t) E_1^*(t) \rangle$ i $\langle E_2(t) E_2^*(t) \rangle$. W dwóch ostatnich wyrazach przesuwamy zero czasu o t_2 i zapisujemy je w postaci

$$k_1 k_2^* \langle E_1(t+\tau) E_2^*(t) \rangle + k_1^* k_2 \langle E_1^*(t+\tau) E_2(t) \rangle, \quad (2.185)$$

przy czym podstawiliśmy $\tau = t_2 - t_1$.

Drugi wyraz w równaniu (2.185) jest sprzężeniem zespolonym pierwszego. Wobec tego możemy zapisać równanie (2.185) w postaci $2\text{Re}\{k_1 k_2^* \langle E_1(t+\tau) E_2^*(t) \rangle\}$. Wyrażenie

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t+\tau) E_2^*(t) \rangle \quad (2.186)$$

nazywa się *funkcją spójności wzajemnej*. Opisuje ona korelację wzajemną pól promieniowania w punktach S_1 i S_2 . Jeśli amplitudy i fazy pól E_1 i E_2 fluktuują w czasie, to wielkość $\Gamma_{12}(\tau)$, będąca średnią po czasie, jest równa zero, gdy te fluktuacje pól w dwóch różnych punktach i w dwóch różnych chwilach są całkowicie nieskorelowane. Gdyby pole w punkcie S_1 w chwili $t+\tau$ było doskonale skorelowane z polem w punkcie S_2 w chwili t , wtedy faza względna nie ulegałaby zmianie mimo fluktuacji obu pól. Wstawiając wyrażenie (2.186) do (2.184), otrzymujemy natężenie w punkcie P (zauważmy, że k_1 i k_2 są liczbami czysto urojonymi, dla których $2\text{Re}\{k_1 k_2\} = 2|k_1||k_2|$):

$$I_P = \varepsilon_0 c [|k_1|^2 I_{S_1} + |k_2|^2 I_{S_2} + 2|k_1||k_2| \text{Re}\{\Gamma_{12}(\tau)\}]. \quad (2.187)$$

Pierwszy wyraz tego wzoru, $I_1 = \varepsilon_0 c |k_1|^2 I_{S_1}$, daje natężenie w punkcie P , gdy jest otwarta tylko szczelina S_1 ($k_2 = 0$); drugi, $I_2 = \varepsilon_0 c |k_2|^2 I_{S_2}$ – gdy $k_1 = 0$.

Wprowadźmy funkcje spójności

$$\Gamma_{11}(\tau) = \langle E_1(t+\tau)E_1^*(t) \rangle, \quad \Gamma_{22}(\tau) = \langle E_2(t+\tau)E_2^*(t) \rangle, \quad (2.188)$$

opisujące korelację amplitud pola w tym samym punkcie w różnych chwilach. Dla $\tau = 0$ funkcje spójności własnej (funkcje autokorelacji)

$$\Gamma_{11}(0) = \langle E_1(t)E_1^*(t) \rangle = I_1/(\varepsilon_0 c),$$

$$\Gamma_{22}(0) = I_2/(\varepsilon_0 c)$$

są proporcjonalne do natężeń I_1 i I_2 w punktach odpowiednio S_1 i S_2 .

Jeśli zdefiniujemy unormowaną funkcję spójności wzajemnej jako

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\langle E_1(t+\tau)E_2^*(t) \rangle}{\sqrt{\langle |E_1(t)|^2 \rangle \langle |E_2(t)|^2 \rangle}}, \quad (2.189)$$

to możemy zapisać równanie (2.187) w postaci

$$I_P = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\}. \quad (2.190)$$

Jest to ogólne prawo interferencyjne dla światła częściowo spójnego. Wielkość $\gamma_{12}(\tau)$ nazywa się *zespółonym stopniem spójności*. Jego sens fizyczny można zilustrować następująco. Wyraźmy wielkość zespółoną $\gamma_{12}(\tau)$ jako

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| e^{i\phi_{12}(\tau)}, \quad (2.191)$$

gdzie faza $\phi_{12}(\tau)$ jest związana z fazami pól E_1 i E_2 występujących w równaniu (2.186).

Dla fali kwazimonochromatycznej $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ różnica dróg optycznych $r_2 - r_1$ powoduje różnicę faz

$$\varphi = (2\pi/\lambda)(r_2 - r_1) = \omega\tau, \quad \text{gdź} \quad \tau = (r_2 - r_1)/c. \quad (2.192)$$

Jeśli położymy $\phi_{12}(\tau) = \alpha_{12}(\tau) + \varphi$, to otrzymamy

$$\text{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\} = |\gamma_{12}(\tau)| \cos[\alpha_{12}(\tau) + \varphi]$$

i będziemy mogli sprowadzić równanie (2.190) do postaci

$$I_P = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \cos[\alpha_{12}(\tau) + \varphi]. \quad (2.193)$$

Dla $|\gamma_{12}(\tau)| = 1$ równanie (2.193) opisuje interferencję dwóch całkowicie spójnych fal, których fazy w punktach S_1 i S_2 różnią się o $\alpha_{12}(\tau)$. Dla $|\gamma_{12}(\tau)| = 0$ wyraz interferencyjny znika. Mówimy, że fale są wtedy całkowicie niespójne. Dla $0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1$ mamy *spójność częściową*. $\gamma_{12}(\tau)$ jest więc miarą stopnia spójności.

Do zilustrowania powyższych rozważań zastosujemy funkcje korelacji do opisu przykładów omówionych w paragrafach 2.10.1 i 2.10.2. W interferometrze Michel-

sona niemal równoległa fala wejściowa jest dzielona przez płytkę S na dwie fale, które spotykają się ponownie w płaszczyźnie B (rys. 2.35). Jeśli obie fale składowe mają taką samą amplitudę $E = E_0 \exp[i\phi(t)]$, to stopień spójności jest równy

$$\gamma_{11}(\tau) = \frac{\langle E(t+\tau)E^*(t) \rangle}{|E(t)|^2} = \langle e^{i\phi(t+\tau)}e^{-i\phi(t)} \rangle. \quad (2.194)$$

Dla długiego czasu uśrednienia T

$$\langle e^{i\phi(t+\tau)}e^{-i\phi(t)} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i[\phi(t+\tau) - \phi(t)]} dt, \quad (2.195)$$

i kładąc $\Delta\phi = \phi(t+\tau) - \phi(t)$, otrzymujemy

$$\gamma_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\cos \Delta\phi + i \sin \Delta\phi) dt.$$

Dla fali ściśle monochromatycznej o nieskończonej długości spójności Δs_c faza jest równa $\phi(t) = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, a $\Delta\phi = \omega\tau$. Daje to

$$\gamma_{11}(\tau) = \cos \omega\tau + i \sin \omega\tau = e^{i\omega\tau}, \quad |\gamma_{11}(\tau)| = 1. \quad (2.196)$$

Dla fali o szerokości widmowej $\Delta\omega$ tak dużej, że $\tau > \Delta s_c/c = 1/\Delta\omega$, różnice faz $\Delta\phi$ zmieniają się w sposób przypadkowy w zakresie od 0 do 2π i całka uśrednia się do zera, dając $|\gamma_{11}(\tau)| = 0$.

W doświadczeniu Younga (rys. 2.36) ze źródłem o małej szerokości widmowej, ale rozciąglym, dominują efekty spójności *przestrzennej*. Kształt prążków w płaszczyźnie B jest zależny od $\Gamma(S_1, S_2, \tau) = \Gamma_{12}(\tau)$. W pobliżu prążka środkowego $r_2 - r_1 = 0$, $\tau = 0$ i wielkości $\Gamma_{12}(0)$ i $\gamma_{12}(0)$ mogą być wyznaczone z widzialności obrazu interferencyjnego.

Aby znaleźć wartość $\gamma_{12}(\tau)$ dla dowolnego punktu P ekranu B z rys. 2.36, należy zmierzyć natężenie światła $I = I(P)$, gdy obie szczeliny są otwarte, a także natężenie $I_1(P)$ i $I_2(P)$, gdy jeden z otworów jest zasłonięty. Podstawiając te wartości zmierzone do wzoru (2.190), wyznaczamy stopień spójności

$$\text{Re}[\gamma_{12}(P)] = \frac{I(P) - I_1(P) - I_2(P)}{2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}}. \quad (2.197)$$

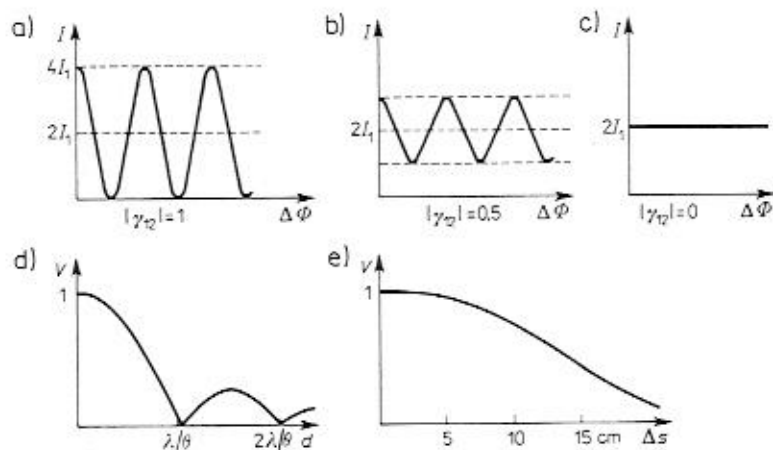
Otrzymujemy w ten sposób żadaną informację o spójności przestrzennej źródła, zależnej od jego rozmiaru. Widzialność prążków w punkcie P jest zdefiniowana następująco:

$$V(P) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1(P)}\sqrt{I_2(P)}}{I_1(P) + I_2(P)} |\gamma_{12}(\tau)|, \quad (2.198)$$

przy czym ostatnia równość wynika ze wzorów (2.190) i (2.197). Dla $I_1 = I_2$ (szczeliny jednakowej wielkości) ze wzoru (2.198) wynika, że

$$V(P) = |\gamma_{12}(\tau)|. \quad (2.199)$$

Widzialność jest więc równa stopniowi spójności. Na rysunku 2.38a–c jest przed-



Rys. 2.38. Obraz interferencyjny w przypadku interferencji dwóch wiązek dla różnych wartości stopnia spójności (a)–(c). Widzialność za dwiema szczelinami z rys. 2.36 oświetlonymi światłem z monochromatycznego źródła rozciągniętego (d). Widzialność za interferometrem Michelsona w zależności od różnicy dróg optycznych Δs przy oświetleniu go światłem o dopplerowskiej szerokości linii (e)

stawiony obraz interferencyjny $I(P)$, powstały w wyniku superpozycji dwóch fal o $I_1 = I_2$ w płaszczyźnie obserwacji B . Natężenie całkowite jest zależne od różnicy faz $\Delta\varphi = \omega\tau$ (2.192). Dla światła całkowicie spójnego ($|\gamma_{12}(\tau)| = 1$), natężenie $I(\tau)$ zmienia się od $4I_1$ do zera, podczas gdy dla $|\gamma_{12}(\tau)| = 0$ wyraz interferencyjny znika i natężenie całkowite nie zależy od τ . Na rysunku 2.38d pokazano widzialność obrazu prążków V w punkcie P w zależności od odległości szczelin d (por. rys. 2.36), w przypadku gdy szczeliny są oświetlone światłem monochromatycznym z rozciągniętego źródła jednorodnego w kształcie kwadratu o boku b , widzianego z S_1 pod kątem θ . Rysunek 2.38e przedstawia widzialność jako funkcję różnicy dróg optycznych Δs w interferometrze Michelsona oświetlonym neonową lampą wyładowczą emitującą linię o długości fali $\lambda = 632,8$ nm, której szerokość jest wyznaczona przez poszerzenie dopplerowskie.

Bardziej szczegółowe omówienie zagadnień spójności jest zawarte w podręcznikach [2.5], [2.27], [2.28].