

IM-14 – BEZDOTYKOWY POMIAR TEMPERATURY

I. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie techniki pomiaru wysokich temperatur w oparciu o prawo Plancka.

II. Zagadnienia do przygotowania:

- 1) Widmo ciał świejących, promieniowanie termiczne, prawa Wiena i Plancka.
- 2) Zasada działania fotopowielacza i monochromatora pryzmatycznego.
- 3) Zasada działania pirometru optycznego

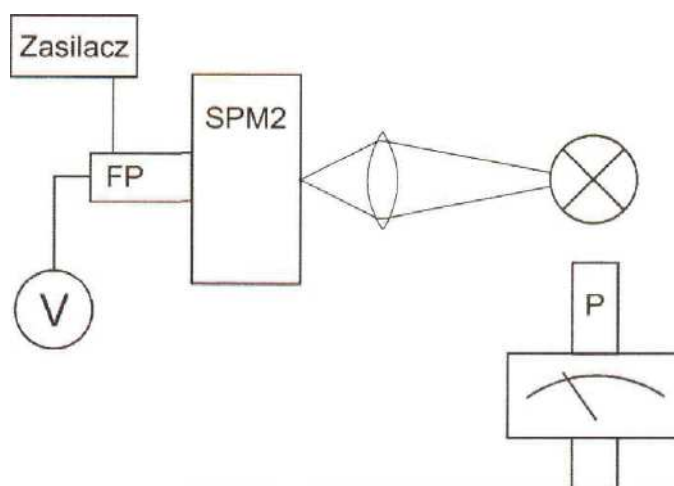
z

III. Aparatura:

- 1) Lampa żarowa – źródło światła.
- 2) Monochromator z fotopowielaczem.
- 3) Opór wzorcowy, woltomierze cyfrowe.
- 4) Pirometr optyczny ze znikającym włóknem.

IV Przebieg pomiarów

1. Ustawienie lampy żarowej na ławie optycznej i skupienie światła przez nią emitowanego za pomocą soczewki na szczelinie wejściowej monochromatora wg rysunku poniżej:



Schemat układu pomiarowego do wyznaczenia współczynnika we wzorze Plancka. FP oznacza fotopowielacz, SPM2 monochromator, a P pirometr.

2. Dla prądu zasilającego lampę ok. 4.5 A zebranie widma lampy żarowej w funkcji długości fali światła odczytanej na skali monochromatora (pokrętko ustawione na G60, potrzebujemy 10-20

punktów na krzywej) i zgrubne ustalenie położenia maksimum widma. Napięcie na fotopowielaczu, gdyby był on idealny, powinno być proporcjonalne do natężenia światła na niego padającego. Ale czułość fotopowielacza zależy od długości fali światła na niego padającego. Zatem, nie znając jego charakterystyki nie możemy powiedzieć, że zmierzona zależność będzie odpowiadała prawdziwemu widmu światła emitowanego przez lampę żarową. Podczas pomiarów napięcie zasilające fotopowielacz powinno być równe 1100V. To jest wysokie napięcie, więc pod żadnym pozorem nie można otwierać zasilacza bądź fotopowielacza!

3. Metoda izochromat. Dla jednej lub więcej ustalonych długości fali w okolicy maksimum należy zbadać zależność natężenia światła od temperatury źródła mierzonej pirometrem. Temperaturę żarnika zmieniamy regulując prąd płynący przez żarnik zaczynając od ok. 2A (temperatura rzędu 900°C), tak aby uzyskać 20-30 punktów na krzywej. Proszę zrobić tak, aby jeden z punktów wypadł dla takiego samego prądu zasilania jaki był użyty przy pomiarze widma w punkcie 2.

Pomiar temperatury za pomocą pirometru polega na porównywaniu barwy ciała, którego temperaturę mierzymy z barwą włókna grzanego elektrycznie w pirometrze. Obracając pokrętką pirometru należy doprowadzić do możliwie całkowitego zlania się obrazu włókna i mierzonego obiektu. Temperaturę odczytuje się na skali przyrządu. Pirometr zasilany jest z zasilacza umieszczonego pod stołem laboratoryjnym napięciem 2.5V. Proszę się zastanowić, jaka jest dokładność pomiaru tą metodą.

V Opracowanie pomiarów

1. Metoda izochromat: dla każdej długości fali, dla której dokonano pomiarów proszę wykreślić zależność zmierzonego natężenia światła od temperatury, sprawdzić rząd wielkości wykładnika w prawie Plancka i dopasować do znalezionej krzywej zależność postaci:

$$I(T) = C_1 \exp\left(\frac{-C_2}{T}\right) + C_3$$

Proszę przedyskutować, dlaczego taka postać jest wystarczająca. Ze znalezionej wartości C_2 proszę wyznaczyć stałą Plancka i porównać ją z wartością tablicową.

2. Proszę wykreślić widmo lampy żarowej $I(\nu)$, otrzymane w punkcie IV.2. Podczas pomiaru metodą izochromat, zmierzaliśmy jaka była temperatura włókna, gdy było ono zasilane napięciem 4.5V. Proszę na tym samym wykresie wykreślić jak wygląda rozkład Plancka i rozkład Wiena dla takiej temperatury. Proszę przedyskutować skąd są rozbieżności.

Uwaga: na wykresach, oprócz punktów pomiarowych powinny być zaznaczone ich niepewności.

VI. Literatura

- 1) R. Eisberg, R. Resnick, Fizyka kwantowa atomów, cząsteczek, jąder i cząstek elementarnych, PWN Warszawa 1983.
- 2) Sz. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna, t. IV, rozdz. 5
- 3) Wprowadzenie teoretyczne poniżej – **UWAGA: Nie trzeba uczyć się wyprowadzeń.** Ważne są wzory (16) i (17).

WPROWADZENIE TEORETYCZNE

Ciało doskonale czarne

Większość ciał materialnych podgrzanych do dostatecznie wysokiej temperatury staje się źródłami promieniowania. Ciała mogą także pochłaniać i rozpraszać promieniowanie, a wszystkie te procesy zależą od właściwości ciał, od ich temperatury i od częstotliwości promieniowania. Pole promieniowania elektromagnetycznego charakteryzowane jest przez gęstość energii (ρ), która dla promieniowania w próżni wynosi:

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) , \quad (1)$$

gdzie ϵ_0 – przenikalność dielektryczna próżni, E – natężenie pola elektrycznego, μ_0 – przenikalność diamagnetyczna próżni a B – indukcja magnetyczna.

Spektralną gęstość energii pola promieniowania [$\rho(\nu)$]definiujemy jako:

$$\rho(\nu) = \frac{d\rho}{d\nu} . \quad (2)$$

$\rho(\nu)d\nu$ ma zatem sens energii promieniowania o częstotliwościach w przedziale od ν do $\nu + d\nu$ zawartej w jednostce objętości.

Rozpatrzmy teraz przypadek gdy pole promieniowania znajduje się w zamkniętej wnęce w stanie równowagi termodynamicznej i jest charakteryzowane temperaturą T . Wtedy **równowagowa, spektralna gęstość energii zależy od temperatury a nie od kształtu i właściwości ścianek wnęki**. To sformułowanie stanowi *pierwsze prawo Kirchhoffa*, które możemy zapisać następująco:

$$\rho(\nu) = \rho_T(\nu).$$

Możemy teraz umieścić w wnęce dodatkowe ciała fizyczne. Jeśli ustali się równowaga termodynamiczna charakteryzowana temperaturą T wnioskujemy, na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa, że obecność tych ciał nie wpływa na pole promieniowania poza nimi (bo możemy je traktować jako część wnęki).

Dla każdego ciała właściwości emisji promieniowania i jego pochłaniania są ze sobą związane. Współczynnik absorpcji definiuje się, jako stosunek energii pochłanianej przez jednostkę powierzchni ciała w jednostce czasu do całkowitej energii promieniowania padającej na tę jednostkową powierzchnię w jednostce czasu. Zakłada się przy tym, że promieniowanie pada izotropowo na powierzchnię ciała. Dodatkowo można określić spektralny współczynnik absorpcji $A(\nu)$ a więc odnoszący się wyłącznie do promieniowania w zakresie częstotliwości od ν do $\nu + d\nu$. *Drugie prawo Kirchhoffa* precyzuje, że **w warunkach równowagi energia promieniowania pochłaniana przez jednostkę powierzchni ciała równa jest energii wypromieniowanej przez ten element powierzchni**:

$$R(\nu) = \frac{c}{4} \rho_T(\nu) A(\nu) \quad . \quad (3)$$

$R(\nu)$ jest gęstością spektralną strumienia energii emitowanego przez ciało, a czynnik $c/4$ wynika ze związku między gęstościami spektralnymi energii i strumienia energii, oraz z założenia o izotropowym rozkładzie promieniowania. Stosunkowo łatwo jest wyprowadzić ten związek. Mając spektralną gęstość energii izotropowego pola promieniowania (izotropowe czyli żaden kierunek nie jest wyróżniony) możemy też utworzyć wielkość $d\rho_T(\nu, \Omega)/d\Omega$, opisującą przyczynę do tej gęstości pochodzący od promieniowania przychodzącego z określonego kierunku:

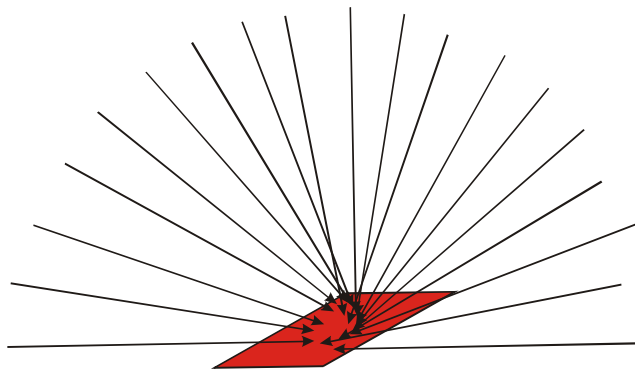
$$d\rho_T(\nu, \Omega)/d\Omega = \rho_T(\nu)/(4\pi). \quad (3.1)$$

(bo rozkład kątowy jest jednorodny).

Możemy teraz wyliczyć spektralną gęstość kątową strumienia energii promieniowania [$S_T(\nu, \Omega)$] (inaczej natężenie promieniowania o częstotliwości ν) mnożąc $\rho_T(\nu)/(4\pi)$ przez prędkość światła:

$$S_T(\nu, \Omega) = c\rho_T(\nu)/(4\pi). \quad (3.2)$$

Aby pokazać związek (3) należy znaleźć całkowity strumień energii promieniowania, przy częstotliwości ν , padający na element powierzchni (tylko z jednej strony) znajdujący się w naszym polu promieniowania. Należy zatem wyciągnąć gęstość kątową strumienia energii promieniowania (wz. 3.2) z cosinusem kąta padania (mierzonym do normalnej) dla wszystkich możliwych kierunków – czyli dla kierunków z półsfery nad powierzchnią (patrz rys. poniżej).- Powinniśmy otrzymać wynik $c/4 \rho_T(\nu)$.



Ciałem doskonale czarnym określa się ciało, które całkowicie pochłania padające na nie promieniowanie, a więc, dla którego $A(\nu) = 1$. Dla takiego ciała związek (3) przyjmuje szczególnie prostą postać:

$$R_T(\nu) = c/4 \rho_T(\nu) \quad , \quad (4)$$

gdzie zaznaczone zostało, że emitowane promieniowanie zależy od temperatury ciała. Możemy zatem opisywać promieniowanie ciała doskonale czarnego albo podając gęstość strumienia energii emitowanej przez ciało, $R_T(\nu)$, albo gęstość energii zawartą w polu

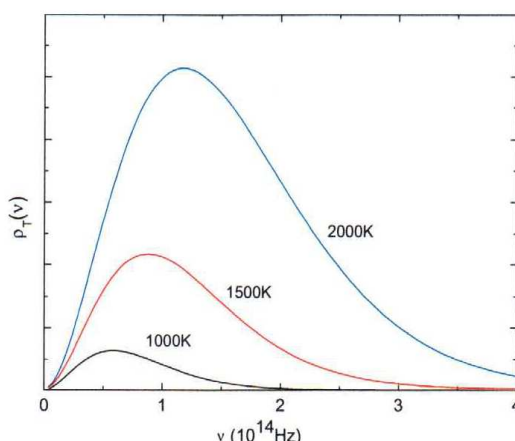
promieniowania we wnęce, $\rho_T(\nu)$. Równanie (4) pokazuje, że obie te wielkości są do siebie proporcjonalne.

Dobrym modelem ciała doskonale czarnego jest wnęka wykonana z nieprzezroczystego materiału najlepiej uczerniona wewnątrz z małym otworkiem wejściowym. Promieniowanie padające z zewnątrz na ten otwór dostaje się do środka wnęki, jest tam wielokrotnie odbijane, rozpraszane i ostatecznie pochłaniane przez ścianki. Ponieważ otwór wejściowy jest bardzo mały, prawdopodobieństwo, że promieniowanie wchodzące wyjdzie z powrotem na zewnątrz jest zanedbywalnie małe. Zatem taki otwór we wnęce zachowuje się jak powierzchnia ciała doskonale czarnego. Z drugiej strony, jeśli ścianki wnęki ogrzane są do skończonej temperatury T , to emitują one promieniowanie termiczne, które wypełni wnękę i wyjdzie przez otwór na zewnątrz. Zatem otwór jest również emitorem promieniowania termicznego pozostającego w równowadze ze ściankami wnęki. Wychodzący strumień promieniowania jest tylko małą częścią strumieni promieniowania wewnątrz wnęki, tak że równowaga termodynamiczna pomiędzy promieniowaniem a ściankami wnęki nie jest zaburzona w sposób istotny. Widmo pola promieniowania wewnątrz wnęki będzie takie samo jak widmo promieniowania ciała doskonale czarnego (i widmo promieniowania z otworka) o temperaturze określonej przez temperaturę ścianek wnęki, T , tak jak to formułuje równanie (4).

Promieniowanie ciała doskonale czarnego — wyniki doświadczalne.

Rozkład widmowy promieniowania ciała doskonale czarnego jest opisywany funkcją $R_T(\nu)$. Najwcześniejsze pomiary tej wielkości zostały wykonane przez Lummera i Pringsheima w 1899 r. Przykładowe rozkłady widmowe dla różnych temperatur przedstawione są na Rys. 3.

Całkowita zdolność emisyjna, R_T , (albo gęstość powierzchniowa strumienia energii) to całka z powyżej zdefiniowanej spektralnej gęstości strumienia energii $R_T(\nu)$ (spotyka się też określenie: zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego) po wszystkich częstotliwościach ν . Jest ona równa całkowitej energii wyemitowanej przez jednostkową powierzchnię ciała o temperaturze T w jednostkowym czasie:



Rys. 3. Rozkład widmowy gęstości energii promieniowania ciała doskonale czarnego przedstawiony dla trzech różnych temperatur: 1000K, 1500K i 2000K.

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu \quad (5)$$

Prawo Stefana-Boltzmann (1879) określa, że wielkość ta jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury ciała:

$$R_T = \sigma T^4 \quad , \quad (6)$$

a stała σ , zwana stałą Stefana-Boltzmann, wynosi $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$.

Maksimum spektralnego rozkładu zdolności emisyjnej zależy od temperatury i z jej wzrostem przesuwa się w stronę wyższych częstotliwości. Prawo Wiena określa, że położenie maksimum jest wprost proporcjonalne do temperatury:

$$\nu_{max} \propto T \quad . \quad (7)$$

Inne sformułowanie tego prawa mówi o długości fali, λ_{max} , dla której występuje maksimum rozkładu emisji:

$$\lambda_{max} T = const \quad . \quad (8)$$

FORMUŁA RAYLEIGHA-JEANSA I FORMUŁA WIENA

Na przełomie ubiegłego stulecia Rayleigh i Jeans wykonali obliczenia energii promieniowania we wnęce (czyli promieniowania ciała doskonale czarnego). Najpierw zastosowali oni klasyczną teorię pola elektromagnetycznego do pokazania, że promieniowanie wewnątrz wnęki ma charakter fal stojących (węzły na ściankach wnęki).

Powtórzmy to rozumowanie. Rozważmy sześcienną wnękę o metalowych ściankach, o krawędzi L . Dozwolone typy drgań pola elektromagnetycznego (mody promieniowania) to fale stojące z węzłami przy ściankach wnęki (ponieważ przesunięcia ładunku swobodnego na powierzchni metalu kasują każde pole elektromagnetyczne równoległe do powierzchni tuż przy powierzchni), które możemy rozważać dla każdego z trzech kierunków kartezjańskich niezależnie.

Zatem możemy napisać: $n_i \lambda / 2 = L$ (n – dowolna liczba naturalna - określająca tutaj ilość połówek długości fali jakie mieszczą się na długości L , a i jest indeksem przebiegającym trzy składowe kartezjańskie ($i=x,y,z$)). Pojedyncze drganie jest „numerowane” przez trójkę liczb (wektor): n_x, n_y, n_z .

Wiedząc, że liczba falowa wiąże się z długością fali zależnością:

$$k = 2\pi\nu/c \quad (9)$$

możemy też napisać:

$$Lk_i = \pi n_i \quad (10)$$

Zadajmy sobie teraz pytanie ile modów (typów drgań pola) o częstotliwościach w zakresie ($\nu, \nu+d\nu$) przypada na jednostkę objętości. (objętość oznaczamy V , w naszym przypadku: $V=L^3$)

Składowe kartezjańskie są niezależne a zatem:

$$dN = dn_x dn_y dn_z$$

Przy czym liczby n_x, n_y, n_z muszą być tak dobrane by długość fali była w zadanym zakresie.

Dla wygody zamiast „numerów modów” \mathbf{n} użyjemy wektorów falowych \mathbf{k} . Drganie (mod) jest opisany przez wektor falowy $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Na podstawie (10) piszemy:

$$dN = dn_x dn_y dn_z = (L/\pi)^3 dk_x dk_y dk_z$$

Oczywiście liczby k_x, k_y, k_z muszą być tak dobrane by długość fali była w zadanym zakresie. Związek pomiędzy liczbą falową a wektorem falowym jest następujący:

$$k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \quad (\vec{k} = \mathbf{k})$$

Mamy też:

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$$

Teraz jesteśmy już gotowi wyliczyć poszukiwaną liczbę stanów (modów). Wiemy już, że:

$$dN = dn_x dn_y dn_z = (L/\pi)^3 dk_x dk_y dk_z \text{ i } k \text{ należy do przedziału } (2\pi\nu/c, 2\pi(\nu+d\nu)/c)$$

Ponieważ wszystkie składowe \mathbf{k} są dodatnie wektory \mathbf{k} wskazują na punkty mieszczące się w 1/8 powłoki kulistej o promieniu k i grubości $2\pi d\nu/c$.

Wykonajmy teraz całkowanie po 1/8 części powłoki:

$$dN(k) = \int_{\substack{\text{po } 1/8 \\ \text{powłoki}}} dN(k_x, k_y, k_z) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \int_{\substack{\text{po } 1/8 \\ \text{powłoki}}} dk_x dk_y dk_z = \frac{1}{8} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \int_{\substack{\text{po całej} \\ \text{powłoce}}} dk_x dk_y dk_z = \dots$$

Przejdźmy do całkowania we współrzędnych sferycznych, przy standartowych oznaczeniach.

$$\dots = \frac{1}{8} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta [k^2 \sin(\varphi)] dk = \frac{1}{8} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 4\pi k^2 dk = \dots$$

zamieniamy: $k = 2\pi\nu/c$ oraz $dk = 2\pi d\nu/c$,

$$\dots = \frac{L^3 \pi (2\pi)^2 \nu^2 d\nu}{2\pi^3 c^3} = \frac{4L^3 \pi \nu^2 d\nu}{c^3}$$

Ponieważ dla każdego modu możliwe są niezależne drgania o dwóch polaryzacjach musimy otrzymany wynik przemnożyć przez 2. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{8L^3\pi\nu^2}{c^3}$$

Lub na jednostkę objętości:

$$\frac{1}{L^3} \frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{1}{V} \frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Zwróćmy uwagę na to, że wynik uniezależnił się od rozmiarów wnęki. Zatem kształt wnęki też może być dowolny.

Spektralną gęstość energii promieniowania w równowadze z ciałem doskonale czarnym możemy zapisać mnożąc gęstość modów przez energię modu jako:

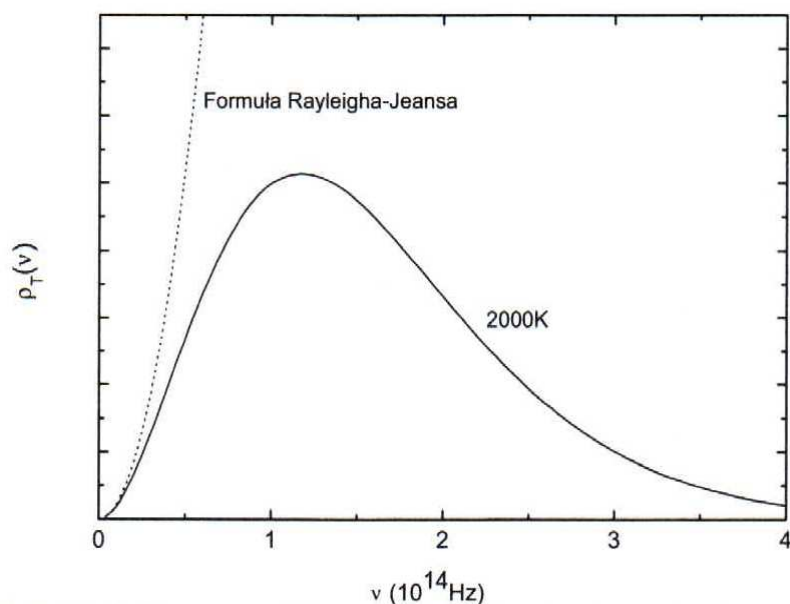
$$\rho(\nu) = \frac{N(\nu)}{V} \langle \varepsilon \rangle = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle \varepsilon \rangle \quad . \quad (11)$$

gdzie jako $\langle \varepsilon \rangle$ oznaczyliśmy (nieco na wyrost) średnią energię wnoszoną do układu przez mod o częstotliwości ν .

W 1900 r. D. Rayleigh i niedługo później D. D. Jeans przedstawili rozumowanie oparte o klasyczne prawo ekwipartycji energii, które mówi, że energia kinetyczna cząsteczki przypadająca na jeden stopień swobody wynosi $k_B T/2$, gdzie k_B jest stałą Boltzmanna. Założyli oni, że rolę niezależnych stopni swobody spełniają różne mody promieniowania, a dodatkowo na każdy mod przypadają dwa niezależne składniki energii; energia potencjalna i energia kinetyczna. Całkowita średnia energia przypadająca na jeden mod wynosi zatem $k_B T$. *Formuła Rayleigha-Jeansa* określa gęstość energii promieniowania ciała doskonale czarnego jako:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad . \quad (12)$$

Porównanie z obserwowanym rozkładem widmowym (Rys. 4) pokazuje, że prawo Rayleigha-Jeansa opisuje poprawnie widmo jedynie w granicy niskich częstotliwości. Dla wysokich częstotliwości wynik teoretyczny przewiduje wartość dążącą do nieskończoności i ponadto całkowita gęstość energii:



Rys. 4. Rozkład widmowy gęstości energii promieniowania ciała doskonale czarnego dla temperatur 2000K (krzywa ciągła) i odpowiadające tym warunkom gęstość widmowe wyliczona według formuły Rayleigha-Jeansa (linia kropkowana).

$$\rho(\nu) = \int_0^{\infty} \rho(\nu) d\nu \rightarrow \infty \quad , \quad (13)$$

co zostało nazwane „katastrofą w nadfiolecie”.

Kilka lat wcześniej, w 1896 r., W. Wien przedstawił inny model, w którym mody drgań mają energie $\epsilon(\nu)$, ale nie wszystkie dostępne mody o danej energii są rzeczywiście wzbudzone. Hipoteza Wiena zakładała, że w zbiorze modów o danej energii ϵ ułamek liczby wzbudzonych modów (ΔN) do liczby wszystkich modów (N) zadany jest przez rozkład Boltzmann dla temperatury T

$$\Delta N/N = \exp(-\epsilon/k_B T) \quad . \quad (14)$$

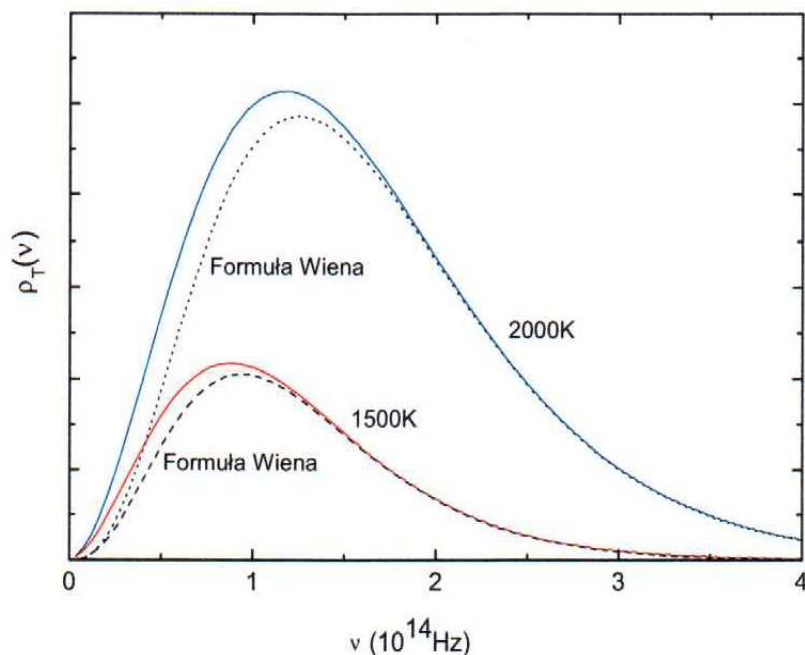
Zatem średnia energia $\langle \epsilon \rangle$ przypadająca na jeden mod o częstotliwości ν wynosi

$$\langle \epsilon \rangle = \epsilon(\nu) \Delta N/N = \epsilon(\nu) \exp(-\epsilon/k_B T) \quad . \quad (15)$$

Dodatkowo wiadomo było, że energia wzbudzonego modu jest proporcjonalna do częstotliwości fali ν . Jeżeli zapiszemy współczynnik proporcjonalności zgodnie ze współczesną wiedzą, jako stałą Plancka h , to otrzymujemy formułę Wiena:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \exp(-h\nu/k_B T) \quad . \quad (16)$$

Formuła ta dobrze oddaje kształt obserwowanego rozkładu promieniowania ciała doskonale czarnego dla wysokich częstotliwości fal, natomiast odbiega od niego dla niskich częstotliwości (Rys. 5).



Rys. 5. Rozkład widmowy gęstości energii promieniowania ciała doskonale czarnego dla temperatur 1500K i 2000K (krzywe ciągłe) i odpowiadające tym warunkom gęstości widmowe wyliczone według formuły Wiena (linie kropkowane).

Formuła Planck'a

W roku 1900 Max Planck przedstawił formułę, która opisuje zależność pomiędzy gęstością energii emitowanego promieniowania a jego częstotliwością ν i temperaturą promienującego ośrodka T : $\rho_T(\nu) = c_1 / (\exp(c_2\nu/T) - 1)$, gdzie stałe c_1 i c_2 można wyrazić przez stałe podstawowe i otrzymać aktualną postać:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (17)$$

Początkowo była to formuła empiryczna stanowiąca interpolację pomiędzy formułami Rayleigha-Jeansa i Wiena. Zwróćmy uwagę że:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \xrightarrow{h\nu/k_B T \gg 1} \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \exp(-h\nu/k_B T) \quad \text{. oraz}$$

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \xrightarrow{h\nu/k_B T \ll 1} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{h\nu/k_B T \ll 1 \text{ (reg. d'Hosp.)}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{h k_B T}{h} \frac{1}{e^0} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} k_B T.$$

Wynik Plancka można wyprowadzić teoretycznie. Postać wzoru Plancka wynika z założenia,

że wypromieniowana i absorbowana energia nie jest wielkością o rozkładzie ciągłym, ale może przyjmować tylko dyskretne wartości, będące wielokrotnościami najmniejszej dozwolonej energii — energii kwantu promieniowania. Każdy mod może być obsadzony przez jeden, dwa lub więcej kwantów promieniowania a prawdopodobieństwo obsadzenia wyznacza znormalizowany rozkład Boltzmanna.

Zwróćmy też uwagę na to, że formułę Wiena można reinterpretować w świetle teorii kwantowej w ten sposób, że dopuszczalne jest obsadzenie jednego modu tylko przez jeden kwant energii.

Za Planck’iem wyliczmy średnią energię modu wykonując sumę przebiegającą po możliwych dyskretnych wartościach energii: $\varepsilon = 0, hv, 2hv, 3hv, \dots$. Oznaczmy $\varepsilon_n = nhv$.

Wtedy:

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n P(\varepsilon_n) = \sum_{n=0}^{\infty} nhv P(\varepsilon_n) = \sum_{n=1}^{\infty} nhv P(\varepsilon_n).$$

$$P(\varepsilon_n) = \frac{\exp(-nhv/k_B T)}{\sum_{m=0}^{\infty} \exp(-mhv/k_B T)}$$

gdzie mianownik jest czynnikiem normalizacyjnym – suma prawdopodobieństw po wszystkich możliwych stanach obsadzenia musi być jedynką: $\sum_{n=0}^{\infty} P(\varepsilon_n) = 1$.

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n P(\varepsilon_n) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} nhv \exp(-nhv/k_B T)}{\sum_{m=0}^{\infty} \exp(-mhv/k_B T)} = \dots \quad (18)$$

Wyliczenie sumy w mianowniku jest proste. Jest to szereg geometryczny z ilorazem $\exp(-hv/k_B T)$ i pierwszym wyrazem 1. Tak więc:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \exp(-mhv/k_B T) = \frac{1}{1 - \exp(-hv/k_B T)} = \frac{\exp(hv/k_B T)}{\exp(hv/k_B T) - 1} \quad (19)$$

Aby wyliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} nhv \exp(-nhv/k_B T)$ wyliczymy najpierw sumę szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-nhv/k_B T) = \frac{\exp(-hv/k_B T)}{1 - \exp(-hv/k_B T)} = \frac{1}{\exp(hv/k_B T) - 1} \quad (19.1)$$

oznaczmy $\beta = 1/k_B T$ a następnie zróżniczkujemy obie strony równania (19.1) po $d\beta$. Otrzymamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-nhv) \cdot \exp(-nhv\beta) = \frac{-hv \cdot \exp(hv\beta)}{[\exp(hv\beta) - 1]^2} \quad (20)$$

Czyli również:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nh\nu \cdot \exp(-nh\nu\beta) = \frac{h\nu \cdot \exp(h\nu\beta)}{[\exp(h\nu\beta) - 1]^2} \quad (20.1)$$

Wracając do oznaczeń początkowych ($kT=1/\beta$) i wstawiając (19) i (20.1) do (18) otrzymamy:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (21)$$

Wstawiając (21) do (9) otrzymujemy ostatecznie formułę Planck'a.