

E4 - WYZNACZANIE STAŁEJ C_2 WE WZORZE PLANCKA I SPRAWDZANIE PRAWA STEFANA-BOLTZMANN

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie praw opisujących promieniowanie ciała doskonale czarnego, oraz optycznych metod pomiaru temperatury.

Zagadnienia do przygotowania:

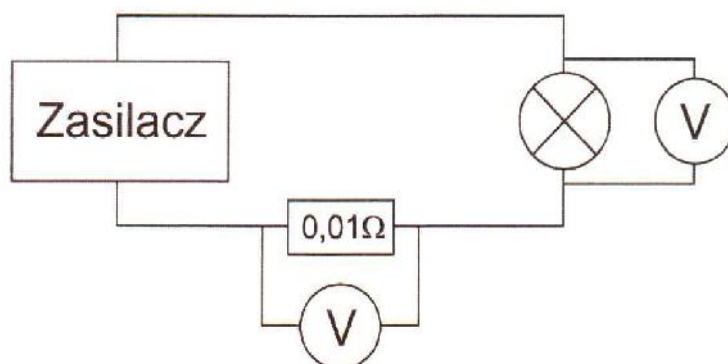
- 1) Definicje wielkości termodynamicznych używanych do opisu promieniowania.
- 2) Podstawowe prawa opisujące zjawisko promieniowania ciała doskonale czarnego
- 3) Zasada działania i budowa używanych przyrządów pomiarowych

Aparatura:

- 1) Lampa żarowa.
- 2) Monochromator z fotopowielaczem.
- 3) Lampa spektralna Hg do kalibracji długości światła w monochromatorze.
- 4) Opór wzorcowy, woltomierze cyfrowe.
- 5) Pirometr optyczny ze znikającym włóknem.

Przebieg pomiarów

Wyznaczenie wykładnika potęgowego w prawie Stefana-Boltzmann.



Rys.1. Schemat układu pomiarowego do wyznaczenia wykładnika potęgowego we wzorze Stefana-Boltzmann.

Aparaturę należy zestawzić zgodnie ze schematem przedstawionym na Rys. 1. Układ pomiarowy składa się z żarówki zasilonej z regulowanego źródła prądowego i szeregowo

włączonego z żarówką oporu wzorcowego $0,01\Omega$. Jeden woltmierz służy do mierzenia spadku napięcia na oporze wzorcowym, a w ten sposób do pomiaru prądu płynącego w obwodzie. Drugi woltmierz mierzy spadek napięcia na samej żarówce.

Celem ćwiczenia jest pomiar energii wypromieniowanej przez żarówkę w funkcji jej temperatury. Równoczesny pomiar spadku napięcia na żarówce U i prądu płynącego przez żarówkę I pozwala określić całkowitą moc dostarczaną do żarówki. Moc elektryczna dostarczana do żarówki tracona jest poprzez procesy przewodnictwa cieplnego oraz procesy promieniste. W stanie stacjonarnym energia dostarczana do żarnika jest równoważona przez energię traconą, a zatem możemy napisać:

$$UI = A(T-T_0) + B(T^n - T_0^n), \quad (A)$$

gdzie pierwszy i drugi składnik sumy po prawej stronie równania opisują odpowiednio moc traconą poprzez przewodnictwo cieplne i poprzez promieniowanie, (A i B są stałymi), T jest temperaturą włókna wyrażoną w K, T_0 temperaturą otoczenia (w K), a n jest nieznanym wykładnikiem.

Pisząc wzór (A) uczyniliśmy założenie, że moc wypromieniowana jest potęgową funkcją temperatury bezwzględnej. Dlaczego nie funkcją różnicy temperatur jak w przypadku przewodnictwa? Nasze założenie sprowadza się do tego, że włókno żarówki promieniuje moc proporcjonalną do T^n oraz absorbuje moc promieniowania z otoczenia proporcjonalną do T_0^n . Gdybyśmy wzięli funkcje potęgowa różnicy temperatur odpowiadałoby to intuicyjnie niemożliwej sytuacji gdy moc wypromieniowana zależałaby od temperatury przedmiotów na które pada promieniowanie ...

Opór elektryczny dla metali jest w bardzo szerokim zakresie, w przybliżeniu proporcjonalny do temperatury. Wzór (A) można więc zapisać w postaci wiążącej traconą moc do bieżącej wartości oporu.

$$UI = A'(R-R_0) + B'(R^n - R_0^n), \quad (B)$$

gdzie A' i B' są nowymi współczynnikami. Opór żarówki można określić z przeprowadzonych pomiarów spadku napięcia i prądu płynącego przez żarówkę.

Należy jeszcze określić tę część energii, która zamieniana jest na promieniowanie. Skorzystać można tu z faktu, że dla małych wartości napięcia i prądu, a więc dla niskich temperatur żarnika, straty radiacyjne są zanedbywalnie małe. Zatem, w takim przypadku, moc będzie zależeć liniowo od oporu. Trzeba wykreślić moc dostarczaną do żarówki w funkcji oporu elektrycznego i do początkowych punktów wykresu dopasować prostą. Można ekstrapolować tę zależność na cały zmierzony zakres pomiarowy i odjąć w ten sposób straty proporcjonalne do temperatury, które interpretujemy, jako straty na przewodnictwo. Po odjęciu części liniowej otrzymuje się zależność typu:

$$P_{rad} = B' R^n - C, \quad (C)$$

skąd można wyznaczyć wykładnik n . Jeśli dopasowanie jest poprawne to $C \rightarrow 0$.

Alternatywnie możemy przekształcić wzór (A) do postaci:

$$UI = AT + BT^n - AT_0 - BT_0^n, \quad (D)$$

czyli

$$UI = BT^n + AT + C \quad (C)$$

Gdzie C jest nową stałą. Jeśli zmierzmy temperaturę włókna (np. pirometrem) to możemy skorzystać z tej zależności. Podobnie jak wyżej możemy zidentyfikować składnik liniowy ($AT + C$), i odjąć go a następnie dopasować funkcję potęgową aby znaleźć wykładnik n . Ściśle rzecz ujmując opór włókna wolframowego nie jest dokładnie proporcjonalny do temperatury i znacznie lepiej jest opisywany przez funkcję potęgową $R(T) = \alpha T^k$ (gdzie k jest nieco większe od jedności). Jeśli, do pomiaru temperatury, zamierzamy wykorzystać pirometr ze znikającym włóknem musimy wykonać pomiar zależności $R(T)$ w zakresie gdzie widać żarzenie włókna i rozszerzyć go (ekstrapolować) na cały zakres temperatur.

Wyznaczenie krzywej dyspersji monochromatora.

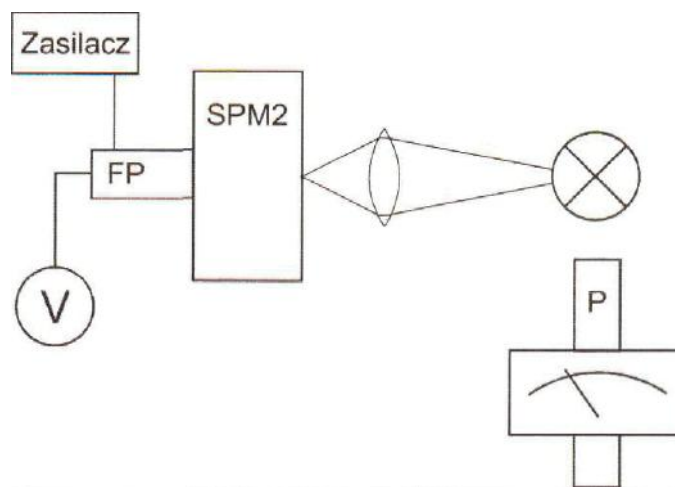
Wyznaczenie krzywej dyspersji jest koniecznym krokiem przed następną częścią doświadczenia, w której potrzebna będzie znajomość długości fali. Monochromator SPM2 jest wyposażony w skalę długości fali, ale o niewystarczającej dokładności. Skala ta pokazuje albo przybliżoną wartość długości fali wybieranej przez monochromator (ustawienie pokrętki „G60”, wartości podane w μm), albo kąt skrzywienia pryzmatu (ustawienie pokrętki „lin”, wartości pokazują kąt w stopniach). Procedura wyznaczania krzywej dyspersji:

1. Włączyć lampę rtęciową i ustawić ją tak, aby światło padało dobrze na szczelinę wejściową monochromatora.
2. Włączyć zasilanie fotopowielacza ($U_f = -1100 \text{ V}$),
3. Wyjście sygnału z fotopowielacza podłączyć do woltomierza.
4. Przeszukać monochromator aż do zaobserwowania linii widmowych rtęci. Dla każdej linii wyznaczyć położenie maksimum i odczytać wskazanie na skali monochromatora. Proszę posługiwać się skalą „lin”.
5. Odczytać z tablic długości fali obserwowanych linii widmowych rtęci.
6. Narysować krzywą dyspersji tj. zależność długości fali od wskazania kąta na skali monochromatora. Krzywa powinna być gładka a wszystkie punkty powinny leżeć na tej krzywej.

Wyznaczenie stałej we wzorze Plancka.

Stałą we wzorze Plancka wyznacza się w tym doświadczeniu metodą izochromat tzn. z pomiaru zależności natężenia światła o ustalonej długości fali w funkcji temperatury źródła. Proszę zastanowić się, czy jest możliwe wykonanie pomiaru dla ustalonej temperatury w funkcji długości fali? Schemat doświadczalny przedstawiony jest na Rys. 2. Żarówkę należy umocować na ławie optycznej i skierować jej światło na szczelinę wejściową monochromatora. Dla wybrania długości fali proszę zmierzyć wstępnie kształt widma promieniowania emitowanego przez żarówkę i ustalić gdzie przypada maksimum emisji. Długości fali, dla których będą wykonywane pomiary, proszę wybrać stosunkowo blisko tego maksimum. Proszę wykonać pomiary, dla co najmniej trzech długości fali.

Temperaturę włókna żarówki mierzy się pirometrem optycznym. Pirometr ze znikającym włóknem działa na zasadzie porównywania barwy mierzonego, rozgrzanego ciała



Rys.2. Schemat układu pomiarowego do wyznaczenia współczynnika we wzorze Plancka. FP oznacza fotopowielacz, SPM2 monochromator, a P pirometr.

z barwą włókna grzanego elektrycznie w pirometrze. Obracając pokrętkę należy doprowadzić do możliwie całkowitego zlania się obrazu włókna i mierzonego obiektu. Temperaturę odczytuje się wtedy na skali przyrządu. Pirometr zasilany jest z zasilacza umieszczonego pod stołem laboratoryjnym napięciem 2,5V.

Opracowanie wyników

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie wykładnika potęgowego w prawie Stefana-Boltzmana w pierwszej części doświadczenia oraz, w drugiej części, wyznaczenie stałej c_2 w prawie Plancka i wyliczenie wartości stałej Plancka h . W sprawozdaniu powinny się znaleźć następujące wykresy:

1. zależność mocy dostarczonej do żarówki od oporu żarówki,
2. powiększona początkowa część wykresu, gdzie moc zależy liniowo od oporu wraz z dopasowaną zależnością liniową,
3. wykres mocy traconej na promieniowanie od oporu z dopasowaniem krzywej potęgowej,
4. krzywa dyspersji monochromatora,
5. zależności napięcia na fotopowielaczu od temperatury włókna żarówki dla

wszystkich wybranych długości fali.

Każdy wykres powinien zawierać punkty pomiarowe z zaznaczonymi błędami doświadczalnymi. Proszę zwrócić uwagę na dyskusję uzyskanych dokładności pomiarów. Jeżeli program użyty do opracowania wyników nie uwzględnia błędów argumentu funkcji, proszę te błędy uwzględnić przez odpowiednie przeskalowanie błędów wartości.

Bezpieczeństwo

Fotopowielacz zasilany jest wysokim napięciem powyżej 1 kV. Należy zachować szczególną ostrożność. Nie otwierać obudowy fotopowielacza ani zasilacza przy włączonym napięciu. Lampa rtęciowa emituje szkodliwy dla oczu ultrafiolet. Proszę oszczędzać swoje oczy i unikać wpatrywania się w samą lampę!

Literatura

- 1) R. Eisberg, R. Resnick, Fizyka kwantowa atomów, cząsteczek, jąder i cząstek elementarnych, PWN Warszawa 1983.
- 2) E. Szpolski, Fizyka atomowa, t. I.

WPROWADZENIE TEORETYCZNE

Ciało doskonale czarne

Większość ciał materialnych podgrzanych do dostatecznie wysokiej temperatury staje się źródłami promieniowania. Ciała mogą także pochłaniać i rozpraszać promieniowanie, a wszystkie te procesy zależą od właściwości ciał, od ich temperatury i od częstotliwości promieniowania. Pole promieniowania elektromagnetycznego charakteryzowane jest przez gęstość energii (ρ), która dla promieniowania w próżni wynosi:

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) , \quad (1)$$

gdzie ϵ_0 – przenikalność dielektryczna próżni, E – natężenie pola elektrycznego, μ_0 – przenikalność diamagnetyczna próżni a B – indukcja magnetyczna.

Spektralną gęstość energii pola promieniowania [$\rho(\nu)$]definiujemy jako:

$$\rho(\nu) = \frac{d\rho}{d\nu} . \quad (2)$$

$\rho(\nu)d\nu$ ma zatem sens energii promieniowania o częstotliwościach w przedziale od ν do $\nu + d\nu$ zawartej w jednostce objętości.

Rozpatrzmy teraz przypadek gdy pole promieniowania znajduje się w zamkniętej wnęce w stanie równowagi termodynamicznej i jest charakteryzowane temperaturą T . Wtedy **równowagowa, spektralna gęstość energii zależy od temperatury a nie od kształtu i właściwości ścianek wnęki**. To sformułowanie stanowi *pierwsze prawo Kirchhoffa*, które możemy zapisać następująco:

$$\rho(\nu) = \rho_T(\nu).$$

Możemy teraz umieścić w wnęce dodatkowe ciała fizyczne. Jeśli ustali się równowaga termodynamiczna charakteryzowana temperaturą T wnioskujemy, na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa, że obecność tych ciał nie wpływa na pole promieniowania poza nimi (bo możemy je traktować jako część wnęki).

Dla każdego ciała właściwości emisji promieniowania i jego pochłaniania są ze sobą związane. Współczynnik absorpcji definiuje się, jako stosunek energii pochłanianej przez jednostkę powierzchni ciała w jednostce czasu do całkowitej energii promieniowania padającej na tę jednostkową powierzchnię w jednostce czasu. Zakłada się przy tym, że promieniowanie pada izotropowo na powierzchnię ciała. Dodatkowo można określić spektralny współczynnik absorpcji $A(\nu)$ a więc odnoszący się wyłącznie do promieniowania w zakresie częstotliwości od ν do $\nu + d\nu$. *Drugie prawo Kirchhoffa* precyzuje, że **w warunkach równowagi energia promieniowania pochłaniana przez jednostkę powierzchni ciała równa jest energii wypromieniowanej przez ten element powierzchni:**

$$R(\nu) = \frac{c}{4} \rho_T(\nu) A(\nu) \quad . \quad (3)$$

$R(\nu)$ jest gęstością spektralną strumienia energii emitowanego przez ciało, a czynnik $c/4$ wynika ze związku między gęstością spektralną energii a gęstością spektralną strumienia energii, oraz z założenia o izotropowym rozkładzie promieniowania. Stosunkowo łatwo jest wyprowadzić ten związek: mając spektralną gęstość energii izotropowego pola promieniowania (izotropowe czyli żaden kierunek nie jest wyróżniony) możemy też utworzyć wielkość $d\rho_T(\nu, \Omega)/d\Omega$, opisującą przyczynek do tej gęstości od promieniowania przychodzącego z określonego kierunku:

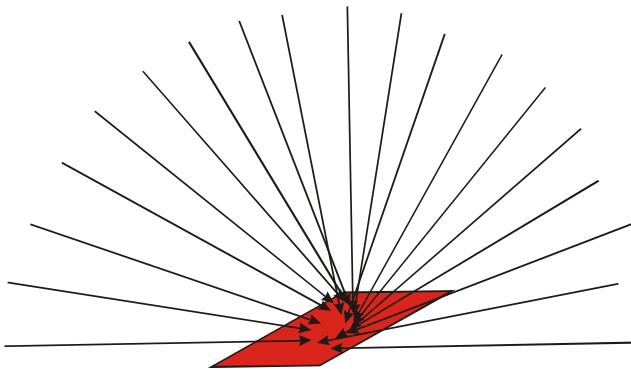
$$d\rho_T(\nu, \Omega)/d\Omega = \rho_T(\nu)/(4\pi). \quad (3.1)$$

(bo rozkład kątowy jest jednorodny).

Możemy teraz wyliczyć spektralną gęstość kątową strumienia energii promieniowania $[S_T(\nu, \Omega)]$ (inaczej natężenie promieniowania o częstotliwości ν) mnożąc $\rho_T(\nu)/(4\pi)$ przez prędkość światła:

$$S_T(\nu, \Omega) = c\rho_T(\nu)/(4\pi). \quad (3.2)$$

Aby pokazać związek (3) należy znaleźć całkowity strumień energii promieniowania, przy częstotliwości ν , padający na element powierzchni (tylko z jednej strony) znajdujący się w naszym polu promieniowania. Należy zatem wycalkować gęstość kątową strumienia energii promieniowania (wz. 3.2) z cosinusem kąta padania (mierzonym do normalnej) dla wszystkich możliwych kierunków – czyli dla kierunków z półsfery nad powierzchnią (patrz rys. poniżej).- Powinniśmy otrzymać wynik $c/4 \rho_T(\nu)$.



Rys. 2.1 Promieniowanie na element powierzchni umieszczony w we wnęce pada ze wszystkich stron jednorodnie...

Ciałem doskonale czarnym określa się ciało, które całkowicie pochłania padające na nie promieniowanie, a więc, dla którego $A(\nu) = 1$. Dla takiego ciała związek (3) przyjmuje szczególnie prostą postać:

$$R_T(\nu) = c/4 \rho_T(\nu) \quad , \quad (4)$$

gdzie zaznaczone zostało, że emitowane promieniowanie zależy od temperatury ciała.

Możemy zatem opisywać promieniowanie ciała doskonale czarnego albo podając gęstość strumienia energii emitowanej przez ciało, $R_T(\nu)$, albo gęstość energii zawartą w polu promieniowania we wnętrzu, $\rho_T(\nu)$. Równanie (4) pokazuje, że obie te wielkości są do siebie proporcjonalne.

Dobrym modelem ciała doskonale czarnego jest wnęka wykonana z nieprzezroczystego materiału najlepiej uczerniona wewnątrz z małym otworkiem wejściowym. Promieniowanie padające z zewnątrz na ten otwór dostaje się do środka wnęki, jest tam wielokrotnie odbijane, rozpraszane i ostatecznie pochłaniane przez ścianki. Ponieważ otwór wejściowy jest bardzo mały, prawdopodobieństwo, że promieniowanie wchodzące wyjdzie z powrotem na zewnątrz jest zanedbywalnie małe. Zatem taki otwór we wnętrzu zachowuje się jak powierzchnia ciała doskonale czarnego. Z drugiej strony, jeśli ścianki wnęki ogrzane są do skończonej temperatury T , to emitują one promieniowanie termiczne, które wypełni wnękę i wyjdzie przez otwór na zewnątrz. Zatem otwór jest również emitorem promieniowania termicznego pozostającego w równowadze ze ściankami wnęki. Wychodzący strumień promieniowania jest tylko małą częścią strumienia promieniowania wewnątrz wnęki, tak że równowaga termodynamiczna pomiędzy promieniowaniem a ściankami wnęki nie jest zaburzona w sposób istotny. Widmo pola promieniowania wewnątrz wnęki będzie takie samo jak widmo promieniowania ciała doskonale czarnego (i widmo promieniowania z otworka) o temperaturze określonej przez temperaturę ścianek wnęki, T , tak jak to formułuje równanie (4).

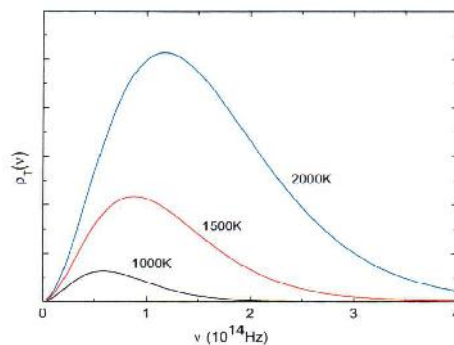
Promieniowanie ciała doskonale czarnego — wyniki doświadczalne.

Rozkład widmowy promieniowania ciała doskonale czarnego jest opisywany funkcją $R_T(\nu)$. Najwcześniejsze pomiary tej wielkości zostały wykonane przez Lummera i Pringsheima w 1899 r. Przykładowe rozkłady widmowe dla różnych temperatur przedstawione są na Rys. 3.

Całkowita zdolność emisyjna, R_T , (albo gęstość powierzchniowa strumienia energii) to całka z powyżej zdefiniowanej spektralnej gęstości strumienia energii $R_T(\nu)$ (spotyka się też określenie: zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego) po wszystkich częstotliwościach ν . Jest ona równa całkowitej energii wyemitowanej przez jednostkową powierzchnię ciała o temperaturze T w jednostkowym czasie:

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu \quad (5)$$

Prawo Stefana-Boltzmann (1879) określa, że wielkość ta jest proporcjonalna do czwartej potęgi



Rys. 3. Rozkład widmowy gęstości energii promieniowania ciała doskonale czarnego przedstawiony dla trzech różnych temperatur: 1000K, 1500K i 2000K.

temperatury ciała:

$$R_T = \sigma T^4, \quad (6)$$

a stała σ , zwana stałą Stefana-Boltzmana, wynosi $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$.

Maksimum spektralnego rozkładu zdolności emisyjnej zależy od temperatury i z jej wzrostem przesuwa się w stronę wyższych częstotliwości. Prawo Wiena określa, że położenie maksimum jest wprost proporcjonalne do temperatury:

$$\nu_{max} \propto T. \quad (7)$$

Inne sformułowanie tego prawa mówi o długości fali, λ_{max} , dla której występuje maksimum rozkładu emisji:

$$\lambda_{max} T = const. \quad (8)$$

FORMUŁA RAYLEIGHA-JEANSA I FORMUŁA WIENA

Na przełomie ubiegłego stulecia Rayleigh i Jeans wykonali obliczenia energii promieniowania we wnęce (czyli promieniowania ciała doskonale czarnego). Najpierw zastosowali oni klasyczną teorię pola elektromagnetycznego do pokazania, że promieniowanie wewnątrz wnęki ma charakter fal stojących (węzły na ściankach wnęki).

Powtórzmy to rozumowanie. Rozważmy sześcienną wnękę o metalowych ściankach, o krawędzi L . Dozwolone typy drgań pola elektromagnetycznego (mody promieniowania) to fale stojące z węzłami przy ściankach wnęki (ponieważ przesunięcia ładunku swobodnego na powierzchni metalu kasują każde pole elektromagnetyczne równoległe do powierzchni tuż przy powierzchni, a nasze promieniowanie to fala poprzeczna), które możemy rozważać dla każdego z trzech kierunków kartezjańskich niezależnie.

Zatem możemy napisać: $n_i \lambda / 2 = L$ (n – dowolna liczba naturalna - określająca tutaj ilość połówek długości fali jakie mieszczą się na długości L , a i jest indeksem przebiegającym trzy składowe kartezjańskie ($i=x,y,z$). Pojedyncze drganie jest „numerowane” przez trójkę liczb (wektor): n_x, n_y, n_z .

Wiedząc, że liczba falowa wiąże się z długością fali zależnością:

$$k = 2\pi\nu/c \quad (9)$$

możemy też napisać:

$$Lk_i = \pi n_i \quad (10)$$

Zadajmy sobie teraz pytanie ile modów (typów drgań pola) o częstotliwościach w zakresie $(\nu, \nu+d\nu)$ przypada na jednostkę objętości. (objętość oznaczamy V , w naszym przypadku: $V=L^3$)

Składowe kartezjańskie są niezależne a zatem:

$$dN = dn_x dn_y dn_z$$

Przy czym liczby n_x, n_y, n_z muszą być tak dobrane by długość fali była w zadanym zakresie.

Dla wygody zamiast „numerów modów” \mathbf{n} użyjemy wektorów falowych \mathbf{k} . Drganie (mod) jest opisany przez wektor falowy $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Na podstawie (10) piszemy:

$$dN = dn_x dn_y dn_z = (L/\pi)^3 dk_x dk_y dk_z$$

Oczywiście liczby k_x, k_y, k_z muszą być tak dobrane by długość fali była w zadanym zakresie. Związek pomiędzy liczbą falową a wektorem falowym jest następujący:

$$k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \quad (\vec{k} = \mathbf{k})$$

Mamy też:

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$$

Teraz jesteśmy już gotowi wyliczyć poszukiwaną liczbę stanów (modów). Wiemy już, że:

$$dN = dn_x dn_y dn_z = (L/\pi)^3 dk_x dk_y dk_z \text{ i } k \text{ należy do przedziału } (2\pi\nu/c, 2\pi(\nu+d\nu)/c)$$

Ponieważ wszystkie składowe \mathbf{k} są dodatnie wektory \mathbf{k} wskazują na punkty mieszczące się w 1/8 powłoki kulistej o promieniu k i grubości $2\pi d\nu/c$.

Wykonajmy teraz całkowanie po 1/8 części powłoki:

$$dN(k) = \int_{\substack{\text{po } 1/8 \\ \text{powłoki}}} dN(k_x, k_y, k_z) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \int_{\substack{\text{po } 1/8 \\ \text{powłoki}}} dk_x dk_y dk_z = \frac{1}{8} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \int_{\substack{\text{po całej} \\ \text{powłoce}}} dk_x dk_y dk_z = \dots$$

Przejdźmy do całkowania we współrzędnych sferycznych, przy standartowych oznaczeniach.

$$\dots = \frac{1}{8} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta [k^2 \sin(\vartheta)] dk = \frac{1}{8} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 4\pi k^2 dk = \dots$$

zamieniamy: $k = 2\pi\nu/c$ oraz $dk = 2\pi d\nu/c$,

$$\dots = \frac{L^3 \pi (2\pi)^2 \nu^2 d\nu}{2\pi^3 c^3} = \frac{4L^3 \pi \nu^2 d\nu}{c^3}$$

Ponieważ dla każdego modu możliwe są niezależne drgania o dwóch polaryzacjach musimy otrzymany wynik przemnożyć przez 2. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{8L^3 \pi \nu^2}{c^3}$$

Lub na jednostkę objętości:

$$\frac{1}{L^3} \frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{1}{V} \frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Zwróćmy uwagę na to, że wynik uniezależnił się od rozmiarów wnęki. Wnioskujemy zatem, że kształt wnęki też może być dowolny.

Spektralną gęstość energii promieniowania w równowadze z ciałem doskonale czarnym możemy zapisać mnożąc gęstość modów przez energię modu jako:

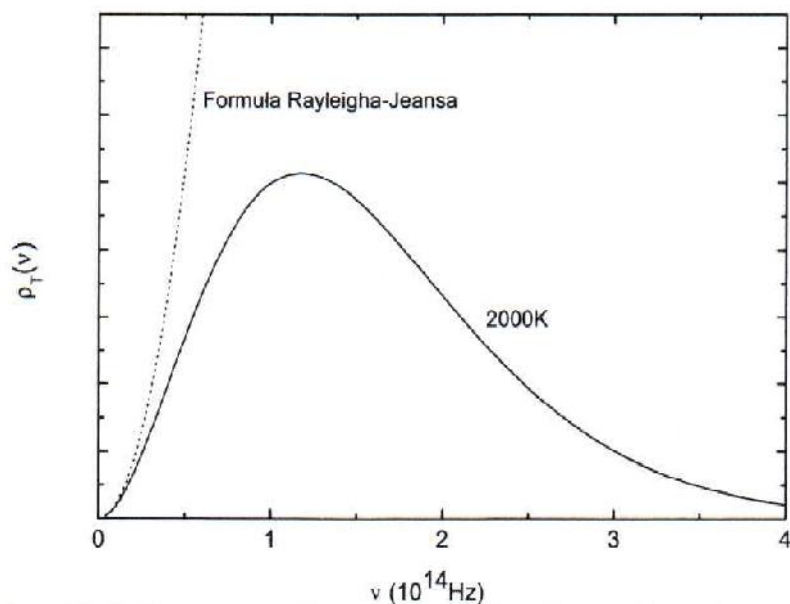
$$\rho(\nu) = \frac{N(\nu)}{V} \langle \varepsilon \rangle = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle \varepsilon \rangle \quad . \quad (11)$$

gdzie jako $\langle \varepsilon \rangle$ oznaczyliśmy (nieco na wyrost) średnią energię wnoszoną do układu przez mod o częstotliwości ν .

W 1900 r. D. Rayleigh i niedługo później D. D. Jeans przedstawili rozumowanie oparte o klasyczne prawo ekwipartycji energii, które mówi, że energia kinetyczna cząsteczki przypadająca na jeden stopień swobody wynosi $k_B T/2$, gdzie k_B jest stałą Boltzmanna. Założyli oni, że rolę niezależnych stopni swobody spełniają różne mody promieniowania, a dodatkowo na każdy mod przypadają dwa niezależne składniki energii; energia potencjalna i energia kinetyczna. Całkowita średnia energia przypadająca na jeden mod wynosi zatem $k_B T$. *Formuła Rayleigha-Jeansa* określa gęstość energii promieniowania ciała doskonale czarnego jako:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad . \quad (12)$$

Porównanie z obserwowanym rozkładem widmowym (Rys. 4) pokazuje, że prawo Rayleigha-Jeansa opisuje poprawnie widmo jedynie w granicy niskich częstotliwości. Dla wysokich częstotliwości wynik teoretyczny przewiduje wartość dążącą do nieskończoności i ponadto całkowita gęstość energii:



Rys. 4. Rozkład widmowy gęstości energii promieniowania ciała doskonale czarnego dla temperatur 2000K (krzywa ciągła) i odpowiadające tym warunkom gęstość widmowe wyliczona według formuły Rayleigha-Jeansa (linia kropkowana).

$$\rho(\nu) = \int_0^{\infty} \rho(\nu) d\nu \rightarrow \infty, \quad (13)$$

co zostało nazwane „katastrofą w nadfiolecie”.

Kilka lat wcześniej, w 1896 r., W. Wien przedstawił inny model, w którym mody drgań mają energie $\varepsilon(\nu)$, ale nie wszystkie dostępne mody o danej energii są rzeczywiście wzbudzone. Hipoteza Wiena zakładała, że w zbiorze modów o danej energii ε ułamek liczby wzbudzonych modów (ΔN) do liczby wszystkich modów (N) zadany jest przez rozkład Boltzmanna dla temperatury T

$$\Delta N/N = \exp(-\varepsilon/k_B T). \quad (14)$$

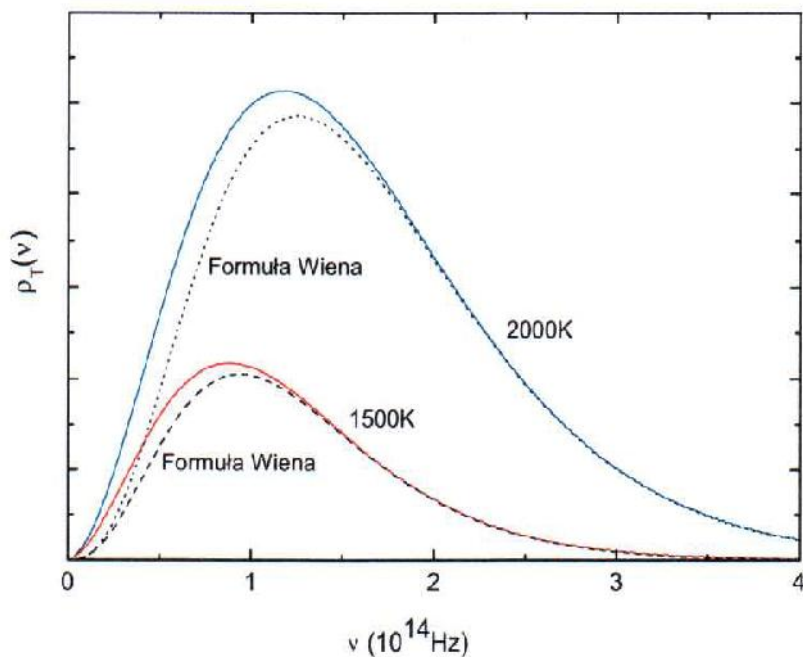
Zatem średnia energia $\langle \varepsilon \rangle$ przypadająca na jeden mod o częstotliwości ν wynosi

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon(\nu) \Delta N/N = \varepsilon(\nu) \exp(-\varepsilon/k_B T). \quad (15)$$

Dodatkowo wiadomo było, że energia wzbudzonego modu jest proporcjonalna do częstotliwości fali ν . Jeżeli zapiszemy współczynnik proporcjonalności zgodnie ze współczesną wiedzą, jako stałą Plancka h , to otrzymujemy formułę Wiena:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \exp(-h\nu/k_B T). \quad (16)$$

Formuła ta dobrze oddaje kształt obserwowanego rozkładu promieniowania ciała doskonale czarnego dla wysokich częstotliwości fal, natomiast odbiega od niego dla niskich częstotliwości (Rys. 5).



Rys. 5. Rozkład widmowy gęstości energii promieniowania ciała doskonale czarnego dla temperatur 1500K i 2000K (krzywe ciągłe) i odpowiadające tym warunkom gęstości widmowe wyliczone według formuły Wien'a (linie kropkowane).

Formuła Planck'a

W roku 1900 Max Planck przedstawił formułę, która opisuje zależność pomiędzy gęstością energii emitowanego promieniowania a jego częstotliwością ν i temperaturą promienującego ośrodka T : $\rho_T(\nu) = c_1 / (\exp(c_2\nu/T) - 1)$, gdzie stałe c_1 i c_2 można wyrazić przez stałe podstawowe i otrzymać aktualną postać:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (17)$$

Początkowo była to formuła empiryczna stanowiąca interpolację pomiędzy formułami Rayleigha-Jeansa i Wien'a. Zwróćmy uwagę że:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \xrightarrow{h\nu/k_B T \gg 1} \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \exp(-h\nu/k_B T) \quad \text{. oraz:}$$

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \xrightarrow{h\nu/k_B T \ll 1} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{h\nu/k_B T \ll 1 \text{ (reg. d'Hosp.)}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{h k_B T}{h} \frac{1}{e^0} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} k_B T.$$

Czyli w granicznych sytuacjach dostajemy formuły Rayleigha-Jeansa i Wien'a.

Wynik Plancka można wyprowadzić teoretycznie na gruncie teorii kwantowej. Postać wzoru Plancka wynika z postulatu, że wypromieniowana i absorbowana energia nie jest wielkością o rozkładzie ciągłym, ale może przyjmować tylko dyskretne wartości, będące wielokrotnościami najmniejszej dozwolonej energii — energii kwantu promieniowania. Każdy mod może być obsadzony przez jeden, dwa lub więcej kwantów promieniowania a prawdopodobieństwo obsadzenia wyznacza znormalizowany rozkład Boltzmanna.

Zwróćmy też uwagę na to, że formułę Wiena można reinterpretować w świetle teorii kwantowej w ten sposób, że dopuszczalne jest obsadzenie jednego modu tylko przez jeden kwant energii.

Aby wykazać wzór Plancka wyliczmy średnią energię modu, wykonując sumę przebiegającą po możliwych dyskretnych wartościach energii: $\varepsilon = 0, hv, 2hv, 3hv, \dots$. Oznaczmy: $\varepsilon_n = nhv$.

Wtedy:

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n P(\varepsilon_n) = \sum_{n=0}^{\infty} nhv P(\varepsilon_n) = \sum_{n=1}^{\infty} nhv P(\varepsilon_n).$$

Gdzie $P(\varepsilon_n)$ jest prawdopodobieństwem tego, że mod przyjmie energię ε_n

$$P(\varepsilon_n) = \frac{\exp(-nhv/k_B T)}{\sum_{m=0}^{\infty} \exp(-mhv/k_B T)}$$

gdzie mianownik jest czynnikiem normalizacyjnym – suma prawdopodobieństw po wszystkich możliwych stanach obsadzenia musi być jedynką: $\sum_{n=0}^{\infty} P(\varepsilon_n) = 1$.

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n P(\varepsilon_n) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} nhv \exp(-nhv/k_B T)}{\sum_{m=0}^{\infty} \exp(-mhv/k_B T)} = \dots \quad (18)$$

Wyliczenie sumy w mianowniku jest proste. Jest to szereg geometryczny z ilorazem $\exp(-hv/k_B T)$ i pierwszym wyrazem 1. Tak więc:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \exp(-mhv/k_B T) = \frac{1}{1 - \exp(-hv/k_B T)} = \frac{\exp(hv/k_B T)}{\exp(hv/k_B T) - 1} \quad (19)$$

Aby wyliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} nhv \exp(-nhv/k_B T)$ wyliczymy najpierw sumę szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-nhv/k_B T) = \frac{\exp(-hv/k_B T)}{1 - \exp(-hv/k_B T)} = \frac{1}{\exp(hv/k_B T) - 1} \quad (19.1)$$

oznaczmy $\beta=1/kT$ a następnie zróżniczkujemy obie strony równania (19.1) po $d\beta$. Otrzymamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-nh\nu) \cdot \exp(-nh\nu\beta) = \frac{-h\nu \cdot \exp(h\nu\beta)}{[\exp(h\nu\beta) - 1]^2} \quad (20)$$

Czyli również:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nh\nu \cdot \exp(-nh\nu\beta) = \frac{h\nu \cdot \exp(h\nu\beta)}{[\exp(h\nu\beta) - 1]^2} \quad (20.1)$$

Wracając do oznaczeń początkowych ($kT=1/\beta$) i wstawiając (19) i (20.1) do (18) otrzymamy:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (21)$$

Wstawiając (21) do (9) otrzymujemy ostatecznie formułę Planck'a.